

Математические утверждения и их структура

Тема: Понятия

План: *1. Математические понятия.*
2. Объем и содержание понятий.
3. Отношения между понятиями.

Математические понятия

Связанные с числами и операциями над ними:
число, сложение, слагаемое,
больше и т.д.

Алгебраические
понятия:
выражение, равенство,
уравнение и т.д.

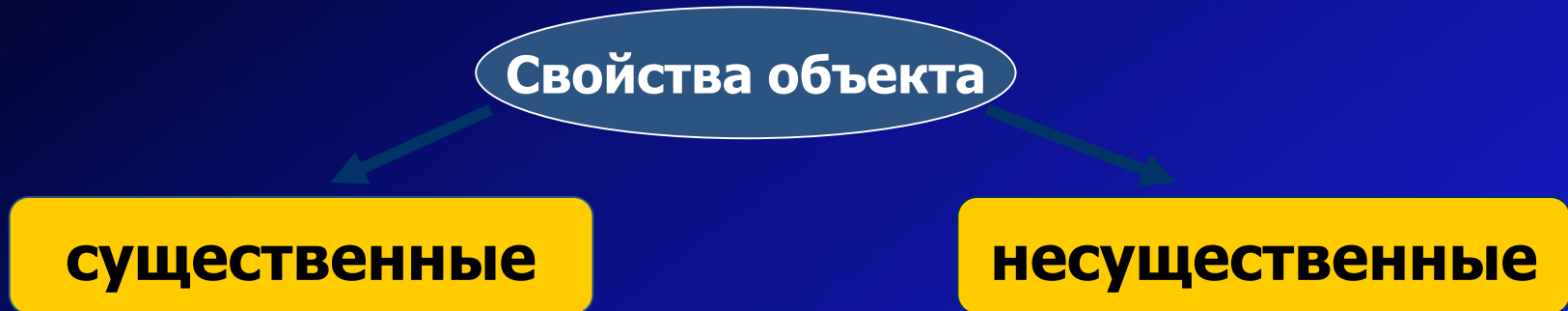
**4 группы понятий,
изучаемых в начальном
курсе математики**

Геометрические
понятия:
прямая, отрезок, квадрат,...

Связанные с величинами
и их измерением:
длина, ширина, объем,
площадь, периметр, масса, ...

- В логике **понятия** рассматривают как форму мысли, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах.
- *Языковой формой понятия* является слово или группа слов.
- *Составить понятия об объекте* – это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов.
- **Понятие** есть результат выделения и обобщения предметов или явлений некоторого класса по их существенным и отличительным признакам.
- Математические понятия обладают такой главной особенностью, что они в реальности не существуют. Они созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Например, понятия «число», «величина» и др.

Объем и содержание понятий

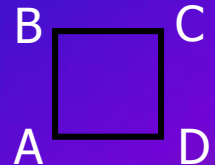
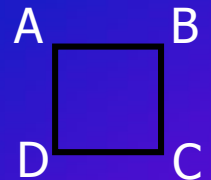


Свойство считают **существенным** для объекта, если оно присуще ему и без него он не может существовать

■ Пример. Понятие «квадрат»

«иметь четыре стороны,
четыре прямых угла,
равные диагонали» } **существенные свойства;**

«сторона AD горизонтальна» - **несущественное свойство.**



Объем понятия — это множество всех объектов, обозначаемых одним термином.

Содержание понятия — это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

Пример. Объемом понятия «прямоугольник» выступает множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т.д.

Взаимосвязь между объемом понятия и его содержанием: **если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот.**

Например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а в содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник».

Отношения между понятиями

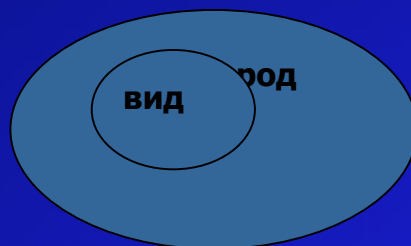
Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объёмами, т. е. множествами.

Понятия обозначают строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c, ..., z.

Объёмы обозначают большими буквами A, B, ...

Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие *a* – видовое по отношению к понятию *b*, а понятие *b* – родовое по отношению к понятию *a*.



Пример: *a* – "прямоугольник"; *b* – "четырёхугольник".

Понятие "прямоугольник" – видовое по отношению к понятию "четырёхугольник", а понятие "четырёхугольник" – родовое по отношению к понятию "прямоугольник".

Если $A=B$, то понятия a и b тождественны.

Пример. «Равносторонний треугольник» и

«равноугольный треугольник».

Свойства отношения рода и вида

- Понятия рода и вида относительно: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, "прямоугольник" – родовое по отношению к понятию "квадрат", но видовое по отношению к понятию "четырёхугольник".
- Для данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий. Например, для понятия "прямоугольник" родовыми являются «четырёхугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них ближайшее – это понятие «параллелограмм».
- Видовое понятие обладает всеми свойствами родового. Например, квадрат, являясь видовым по отношению к понятию "прямоугольник", обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

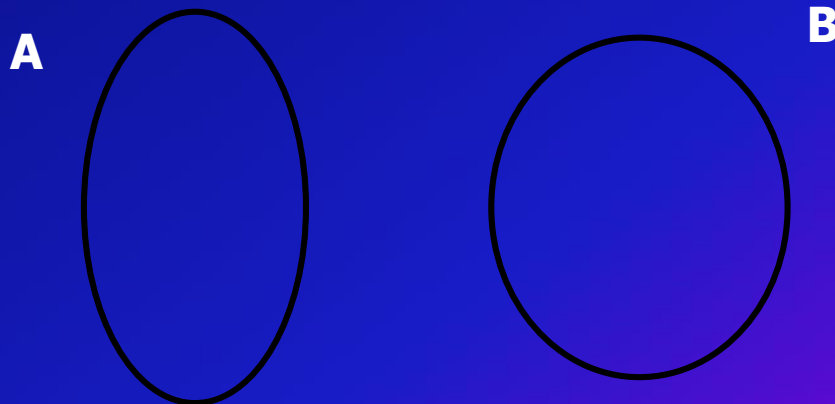
Отношение части и целого

Пример. «Прямая» и «отрезок».

Отрезок – это часть прямой, но не её вид.

Несовместимые понятия – *объемы понятий не пересекаются*

Примеры. «Гений» и «злодейство»,
«положительное число» и «отрицательное число».



Лекция № 2

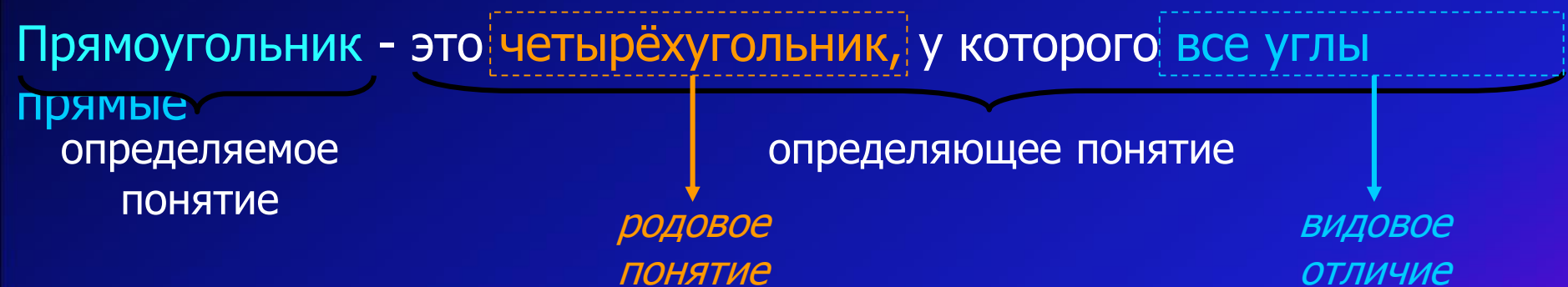
Тема: Определение понятий

План:

- 1. Определение понятий.*
- 2. Правила определения понятий.*
- 3. Определение понятий в начальном курсе математики.*

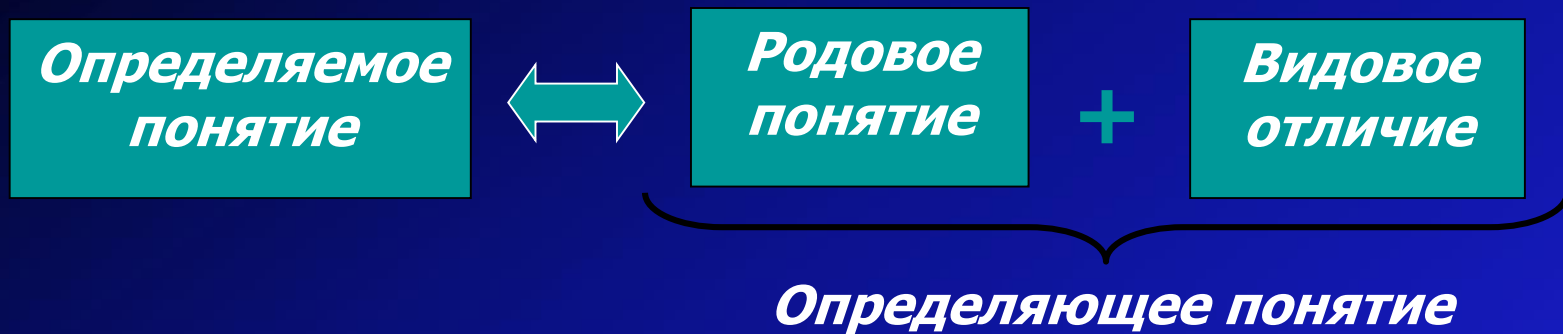
Определение понятий

Определением называют предложение, разъясняющее суть нового термина (или обозначения).



Видовое отличие – это свойство (одно или несколько), которое позволяет выделять определяемые объекты из объёма родового понятия.

Структура явного определения



Кроме определений понятий *через род и видовое отличие*, используются **аксиоматические определения**. Это неявные определения, так как они прямо не называют класс объектов, которые они описывают. Например, понятие *множества, точки, прямой, плоскости*.

Встречаются определения понятий через **противоположность**. Например, понятие «*неравно*» – противоположное понятию *равенства*.

Встречаются определения **через абстракцию**. Например, понятие «*число 5*» можно определить как специфическое общее свойство всех множеств, равномощных с множеством пальцев определенной руки. Это понятие есть свойство, оторванное от конкретных объектов.

Правила определения понятий

1. Соразмерность

объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать

Пример несоразмерного определения: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны».

2. Отсутствие порочного круга

нельзя определить понятие через само себя или определять его через другое, которое, в свою очередь, определять через него

Пример определения, содержащего порочный круг:
«Равные треугольники – это треугольники, которые равны»

3. Ясность



- а) значения терминов, входящих в определяющее понятие, должны быть известны к моменту введения определения;**
- б) включение в видовое отличие столько свойств, сколько необходимо и достаточно;**
- в) обязательное наличие родового понятия, желательно ближайшего.**

Примеры. «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны». Второе свойство – избыточное.

«Квадрат – это когда все стороны равны» - пропущено родовое понятие.

4. Определение одного и того же понятия по-разному



- Квадрат можно определить как:**
- прямоугольник, у которого соседние стороны равны;**
 - прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;**
 - ромб, у которого есть прямой угол;**
 - параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.**

Определение понятий в начальном курсе математики

В начальных классах определения через род и видовое отличие используются редко. Чаще всего используют так называемые **неявные** определения. В их структуре нельзя выделить определяемое и определяющее понятия. Среди них различают:

- 1) **контекстуальные определения** - содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия.

Пример. Определение уравнения и его решения

- 2) **остенсивные определения** — определения путем показа (для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают).

Пример. Определение понятия равенства и неравенства.

Лекция №3

Тема: «*Математические предложения*»

План:

1. Понятие высказывания.
2. Высказывательные формы (предикаты).
3. Образование составных предложений с помощью логических связок.
4. Конъюнкция высказываний.
5. Дизъюнкция высказываний.
6. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.

Понятие высказывания

- ☺ 1) число 12 – четное;
- ☹ 2) $2+5>8$;
- ? 3) $x+5=8$;
- ☺ 4) от перестановки множителей произведение не изменяется.

Высказыванием (суждением, утверждением) в математике называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Предложения 1, 2, 4 – высказывания: 1, 4 – истинные, 2 – ложное.

Обозначают высказывания: A, B, C, ...

Истинное высказывание: A – «и», ложное высказывание: A – «л»

«Истина» и «ложь» – значения истинности высказывания.

Высказывательные формы (предикаты)

$x + 5 = 8$ - не является высказыванием.

Если $x = 2$ – получаем ложное высказывание, при $x = 3$ – истинное высказывание.

$x + 5 = 8$ – *одноместная высказывательная форма (предикат)*

$A(x)$ - одноместный предикат, $A(x, y)$ - двухместный, ...

«Прямая x параллельна прямой y » – двухместный предикат

Множество, из которого выбираются значения переменных, входящих в высказывательную форму, называется **областью определения.**

Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X , называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X .

Множество T значений переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание, называют **множеством истинности** $T \subset X$

Образование составных предложений с помощью логических СВЯЗОК

"и", "или", "если..., то ...",

"тогда и только тогда, когда",

"не", "неверно, что"

логические связки

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют составными.

Предложения, не являющиеся составными, называют элементарными или простыми.

Пример. «Число 28 четное и делится на 7».

Чтобы определить значение истинности составного высказывания, надо знать смысл логических связок и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

- Для выявления логической структуры составного предложения нужно установить:
- из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;
 - с помощью каких логических связок оно образовано.

Пример: «Если углы вертикальные, то они равны».

А – "углы вертикальные", В – "углы равны",
логическая связка "если..., то...".

Логическая структура (форма): "если А, то В".

Конъюнкция высказываний

Конъюнкцией высказываний А и В называют высказывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из ЭТИХ высказываний ложно.

Читают: "А и В"

Таблица истинности

А	В	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример. «Число 28 делится на 7 и на 9»

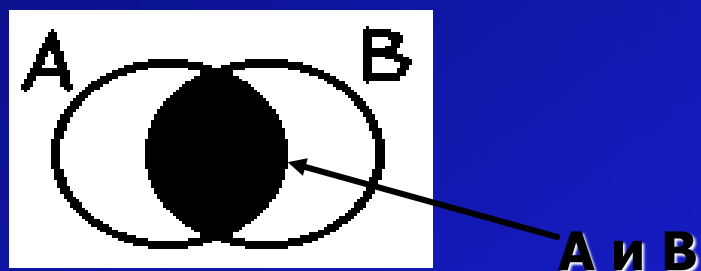
Конъюнкция двух высказываний:

А – "число 28 делится на 7" – истинное высказывание,

В – "число 28 делится на 9" – ложное высказывание.

Следовательно, $A \wedge B$ – "число 28 делится на 7 и на 9" будет ложным.

Изображение конъюнкции на диаграмме Эйлера-Венна



В обыденной речи конъюнкция выражается и другими словами: «а», «но», «однако», «не только..., но и ...».

Конъюнкцией t высказываний называется предложение вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_t$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны все составляющие его высказывания.

Дизъюнкция высказываний

Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Читают: «А или В»

Таблица истинности дизъюнкции

А	В	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Пример. «Число 28 делится на 7 или на 9».

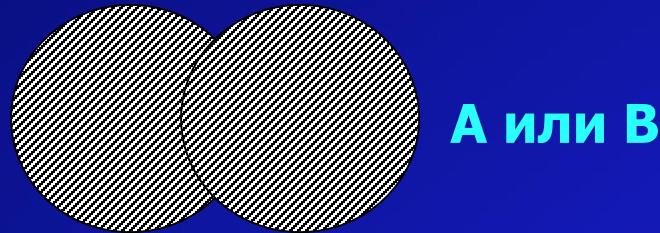
Дизъюнкция двух высказываний:

А – «число 28 делится на 7» - истинно;

В – «число 28 делится на 9» – ложно.

Поэтому $A \vee B$ – «Число 28 делится на 7 или на 9» – истинное высказывание.

Изображение дизъюнкции на диаграмме Эйлера-Венна



Дизъюнкцией t высказываний называется предложение вида $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_t$, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все составляющие его высказывания.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называется **логической операцией**. Названия логических операций и их результаты называются одинаково. Операция, соответствующая союзу «и», называется **конъюнкцией**; операция, соответствующая союзу «или», – **дизъюнкцией**.

Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм

$A(x) \wedge B(x)$ - конъюнкция высказывательных форм

Если T_A – множество истинности $A(x)$, T_B – множество истинности $B(x)$, то множество истинности их конъюнкции $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$

Пример. Найдем множество истинности конъюнкции двух неравенств: $(2x > 10)$ и $(4 + x < 12)$, т.е. множество истинности $2x > 10 \wedge 4 + x < 12$.

Пусть T_1 – множество решений неравенства $2x > 10$, а T_2 – множество решений неравенства $4 + x < 12$.

$T_1 = (5; +\infty)$, $T_2 = (-\infty; 8)$. $T_1 \cap T_2 = (5, 8)$.

Любая система неравенств (уравнений) есть конъюнкция неравенств (уравнений).

$A(x) \vee B(x)$ - дизъюнкция высказывательных форм

Если T_A – множество истинности $A(x)$, T_B – множество истинности $B(x)$, то множество истинности их дизъюнкции: $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$

Пример. Решить уравнение $(x-2)(x+5)=0$.

Уравнение равносильно дизъюнкции: $x-2=0 \vee x+5=0$ и множество его решений - объединение множеств решений этих уравнений, т.е. $\{2\} \cup \{-5\} = \{-5, 2\}$.

Дизъюнкцию уравнений (неравенств) называют так же совокупностью уравнений (неравенств).

Лекция №4

Тема: «**Высказывания с кванторами**»

План: 1) *Кванторы общности и существования.*

2) *Доказательство истинности или ложности высказываний с кванторами.*

Высказывания с кванторами

Часто встречаются слова: «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один». Например, «в любом прямоугольнике противоположные стороны равны» или «некоторые натуральные числа кратны 5».

«число x кратно 5» - высказывательная форма,
«всякое число x кратно 5» - ложное высказывание.

Выражение «для всякого x » называется **квантором общности** по переменной x и обозначается символом $\forall x$.

$(\forall x)A(x)$ означает: «для всякого значения x предложение $A(x)$ – истинное высказывание».

Читают:

- для всякого x из множества X истинно $A(x)$;
- всякий элемент из множества X обладает свойством A .

Наряду со словом «всякий» употребляются слова «каждый, любой».

Выражение «*существует x такое, что...*», называют **квантором существования** по переменной x и обозначается символом $\exists x$.

$(\exists x) A(x)$ означает: «*существует такое значение x , что $A(x)$ истинное высказывание*».

Читают:

- а) *существует такое x из множества X , что истинно $A(x)$;*
- б) *хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством A .*

Вместо слова «**существует**» используют слова

«некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Вывод: если задана одноместная высказывательная форма $A(x)$, то чтобы превратить её в высказывание, достаточно связать квантором общности или существования содержащуюся в ней переменную. Если же предикат содержит несколько переменных, то перевести её в высказывание можно, если связать квантором каждую переменную.

Пример. Выявить логическую структуру высказывания «Некоторые нечетные числа делятся на 5».

Решение. Квантор существования выражен словом «некоторые».

Высказывательная форма «*нечетные числа делятся на 5*», заданная на множестве X нечетных чисел.

Обозначим высказывательную форму $A(x)$, тогда логическая структура: $(\exists x \in X) A(x)$.

Или по-другому: $(\exists x \in X) x:5$, где X – множество нечетных чисел.

Доказательство истинности или ложности высказываний с кванторами

$(\forall x \in X)A(x)$ - высказывание с квантором общности

Убедиться в истинности – показать, что $T_A = X$, убедиться в ложности – показать, что $T_A \neq X$.

Пример. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

- а) Для каждого x из множества $\{0, 1, 4\}$ значение выражения $(4-x):(2x+1)$ есть число целое.
- б) всякое натуральное число делится на 5.

Решение. а) Чтобы убедиться в истинности высказывания, надо показать, что при подстановке каждого числа из множества $\{0, 1, 4\}$ в выражение $(4-x):(2x+1)$ получается целое число. Действительно, значение этого выражения при всех заданных значениях x есть число целое. Установили это путем перебора всех возможных случаев.

б) Высказывание «*всякое натуральное число делится на 5*» – ложное. Убедиться в этом можно, назвав натуральное число, которое не делится на 5, например, 12. В ложности высказывания убедились, приведя контрпример.

**Правило. Истинность
высказывания с квантором
общности устанавливается путем
доказательства. Показать
ложность таких высказываний
можно, приведя контрпример.**

$(\exists x \in X) A(x)$ – высказывание с квантором существования

Оно будет истинно, если $T_A \neq \emptyset$ и ложно, когда $T_A = \emptyset$

Пример. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

- а) Среди треугольников есть прямоугольные.
- б) Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними.

Решение. а) Высказывание содержит квантор существования. Чтобы убедиться в истинности, достаточно привести пример, начертив прямоугольный треугольник.



- б) Из того, что начертить треугольник, который был бы одновременно прямоугольным и равносторонним не удаётся, ещё не следует вывод о ложности данного высказывания. В этом надо убедиться путём доказательства. Действительно, если треугольник прямоугольный, то в нём один угол 90° , а в равностороннем все углы 60° . Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним. Поэтому данное высказывание ложное.

**Правило. Истинность
высказывания с квантором
существования
устанавливается при помощи
конкретного примера. Чтобы
убедиться в ложности такого
высказывания, необходимо
провести доказательство.**

Убедиться в ложности
высказывания — это значит
опровергнуть его.

Лекция №5

Тема: **«Отрицание высказываний и высказывательных форм»**

План:

1. *Отрицание высказываний.*
2. *Построение отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний.*
3. *Отрицание высказываний, содержащих кванторы.*
4. *Отрицание высказывательных форм.*

Отрицание высказываний

Если перед сказуемым данного предложения поставить частицу «**не**», либо перед всем предложением поставить слова «**неверно, что**», то получится новое предложение, которое называется отрицанием данного и обозначается $\neg A$

(читают: «не A » или «неверно, что A »).

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\neg A$, которое ложно, когда высказывание A истинно, и истинно, когда A — ложно.

Таблица истинности отрицания

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

Пример. Отрицание ложного высказывания
«число 28 делится на 9»:

1) число 28 не делится на 9

2) неверно, что число 28 делится на 9

} истинные
высказыва-
ния

Правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний (законы де Моргана)

«Число 28 делится на 9 и на 4» - $A \wedge B$ - ложно, так как
 A – «Число 28 делится на 9» - ложное высказывание,
 B – «Число 28 делится на 4» - истинное высказывание.
Построим отрицание конъюнкции с помощью частицы
«не».

Получим «число 28 не делится на 9 и на 4» - ложное.
Значит, отрицание $A \wedge B$ построено неверно.

Вывод: с помощью частицы «не» нельзя построить
отрицание таких высказываний.

Первый закон де Моргана: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

(отрицанием конъюнкции двух высказываний A и B является дизъюнкция их отрицаний)

Доказательство.

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Второй закон де Моргана: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
(отрицанием дизъюнкции двух высказываний A и B является конъюнкция их отрицаний)

Доказательство аналогично

Правило построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции: чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).

Пример. Построить отрицание высказывания
«число 28 делится на 9 или на 6».

Решение.

1 способ: поставим перед высказыванием слова «неверно, что». Получим «*неверно, что число 28 делится на 9 или на 6*».

2 способ: воспользуемся вторым законом де Моргана. Получим «*число 28 не делится на 9 и не делится на 6*».

Правила построений отрицания высказываний, содержащих кванторы

«Всякий прямоугольный треугольник является
равнобедренным»

Отрицание с помощью частицы «не» - "всякий
прямоугольный треугольник не является
равнобедренным"

Высказывание и его отрицание — ложны. Значит,
отрицание построено неверно.

Вывод: строить отрицание высказываний с кванторами
при помощи частицы "не" перед сказуемым нельзя!

Другой способ – с помощью слов "*неверно, что*",
т.е.

*"неверно, что всякий
прямоугольный
треугольник является
равнобедренным"*



*"некоторые
прямоугольные
треугольники не
являются
равнобедренными"*

Равносильности:

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)A(x);$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x).$$

Правило: для того, чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора

Пример. Построить отрицание высказывания
«*некоторые однозначные числа делятся на 10*»

Решение.

1 способ. Поставим перед высказыванием слова
«неверно, что». Получим
«*неверно, что некоторые однозначные числа
делятся на 10*».

2 способ. Заменим квантор существования на
квантор общности и построим отрицание
предложения, стоящего после слова
«некоторые», поставив частицу «не» перед
сказуемым. Получим
«*все однозначные числа не делятся на 10*».

Отрицание высказывательных форм

Обозначают $\overline{A(x)}$ (читают: «не $A(x)$ » или «неверно, что $A(x)$ »)

$\overline{A(x)}$ – истинно для таких $x \in X$, при которых $A(x)$ – ложно.

$$T_{\overline{A}} = T'_A$$

$T_{\overline{A}}$ – множество истинности предложения $\overline{A(x)}$,

T'_A – дополнение множества T_A до множества X .

Пример. На множестве натуральных чисел задана высказывательная форма $A(x)$ – «*число x кратно 5*».

Ее отрицание «*число x не кратно 5*» (или «*неверно, что число x кратно 5*»), истинное при всех значениях x , которые не кратны 5.

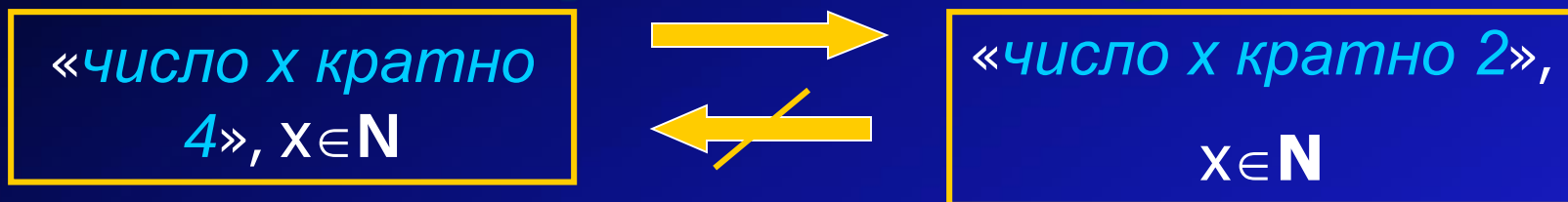
Лекция №6

Тема: «Отношения логического следования и равносильности между предложениями»

План:

- 1) *Отношение логического следования между предложениями.*
- 2) *Отношение равносильности между предложениями.*
- 3) *Структура теоремы.*
- 4) *Виды теорем.*

Отношение логического следования между предложениями (импликация)



Высказывательная форма $B(x)$ следует из высказывательной формы $A(x)$, если $B(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x , при которых $A(x)$ истинна.

Обозначается $A(x) \Rightarrow B(x)$

Читают:

- Из $A(x)$ следует $B(x)$.
- Всякое $A(x)$ есть $B(x)$.
- Если $A(x)$, то $B(x)$.
- $B(x)$ есть следствие $A(x)$.
- $A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$.
- $B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$.

Высказывание «если A , то B » еще называется **импликацией** высказываний или **условным высказыванием**.

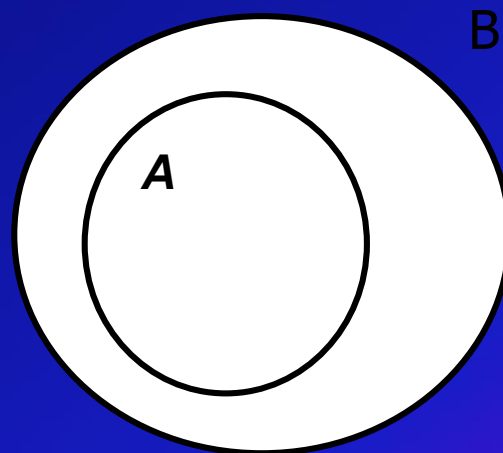
Таблица истинности для импликации

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Так как предложение $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть сформулировано в виде «всякое $A(x)$ есть $B(x)$ », то его истинность устанавливается путем доказательства, а ложность – с помощью контрпримера.

Если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $A(x) \Rightarrow B(x)$ означает, что $T_A \subset T_B$

На кругах Эйлера отношение $A \Rightarrow B$ изображается:



Пример. Доказать, что из уравнения $3x(x-2)=0$ следует уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$, если уравнения заданы на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел.

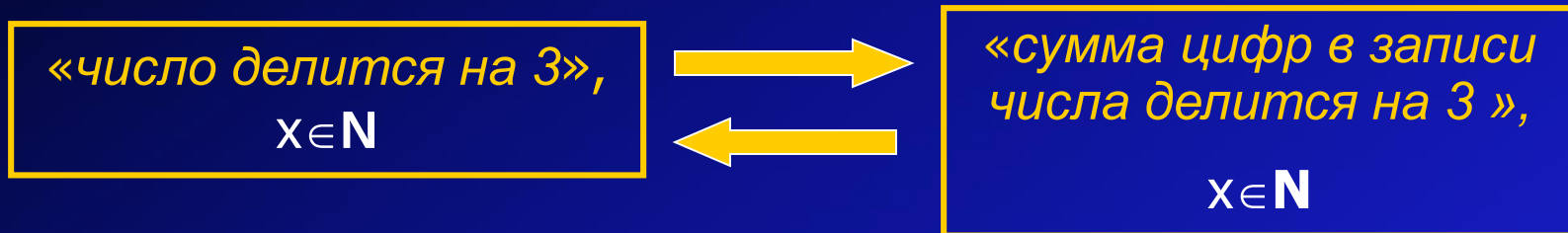
Решение.

Множество решений первого уравнения $T_1=\{0, 2\}$,

множество решений второго $T_2=\{-3, 0, 2\}$.

$T_1 \subset T_2$. Следовательно, из уравнения $3x(x-2)=0$ следует уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$.

Отношение равносильности между предложениями (эквиваленция)



Предложения $A(x)$ и $B(x)$ **равносильны**, если из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$, а из предложения $B(x)$ следует предложение $A(x)$.

Обозначается $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Читают:

- $A(x)$ равносильно $B(x)$.
- $A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$.
- $A(x)$ необходимое и достаточное условие для $B(x)$.
- $B(x)$ необходимое и достаточное условие для $A(x)$.

Высказывание $A \Leftrightarrow B$ еще называют **эквиваленцией**
высказываний A и B

Таблица истинности для эквиваленции

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример. Доказать, что уравнения $3x(x-2)=0$ и $3x(x-2)(x+3)=0$ равносильны на множестве целых неотрицательных чисел.

Решение.

Множество решений первого уравнения – $T_1 = \{0, 2\}$, множество решений второго, заданного на множестве целых неотрицательных чисел – $T_2 = \{0; 2\}$.

Имеем, что $T_1 = T_2$, следовательно, данные уравнения равносильны на множестве целых неотрицательных чисел.

Структура теоремы

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

$$A \Rightarrow B$$

A - условие теоремы, **B** – заключение теоремы

Пример. Теорема «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны»

Условие: «*четырехугольник – прямоугольник*»,
заключение – «*в таком четырехугольнике диагонали равны*».

Правила и формулы

«Если a – любое число и $n, k \in \mathbf{N}$, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ ».

Условие теоремы – « a – любое число и n, k – натуральные числа», заключение – это равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

Правило: «при умножении степеней с одинаковыми основаниями, показатели складываются»

Виды теорем

$A \Rightarrow B$ - прямая теорема
«если A , то B »
«если углы вертикальные,
то они равны»

$B \Rightarrow A$ – обратное данному
«если B , то A »
«если углы равны,
то они вертикальные»

утверждения

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ - противоположное
данному «если не A , то не B »
«если углы не вертикальные,
то они не равны»

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ – обратная
противоположной теорема
«если не B , то не A »
«если углы не равны,
то они не вертикальные»

Закон контрапозиции

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

ТЕМА: Математическое доказательство

План:

- 1) Умозаключения и их виды.*
- 2) Схемы дедуктивных умозаключений.*
- 3) Проверка правильности умозакключений с помощью кругов Эйлера.*
- 4) Способы математического доказательства.*

Умозаключения и их виды

Умозаключение (рассуждение) – способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося.

Состоит из посылок и заключения.

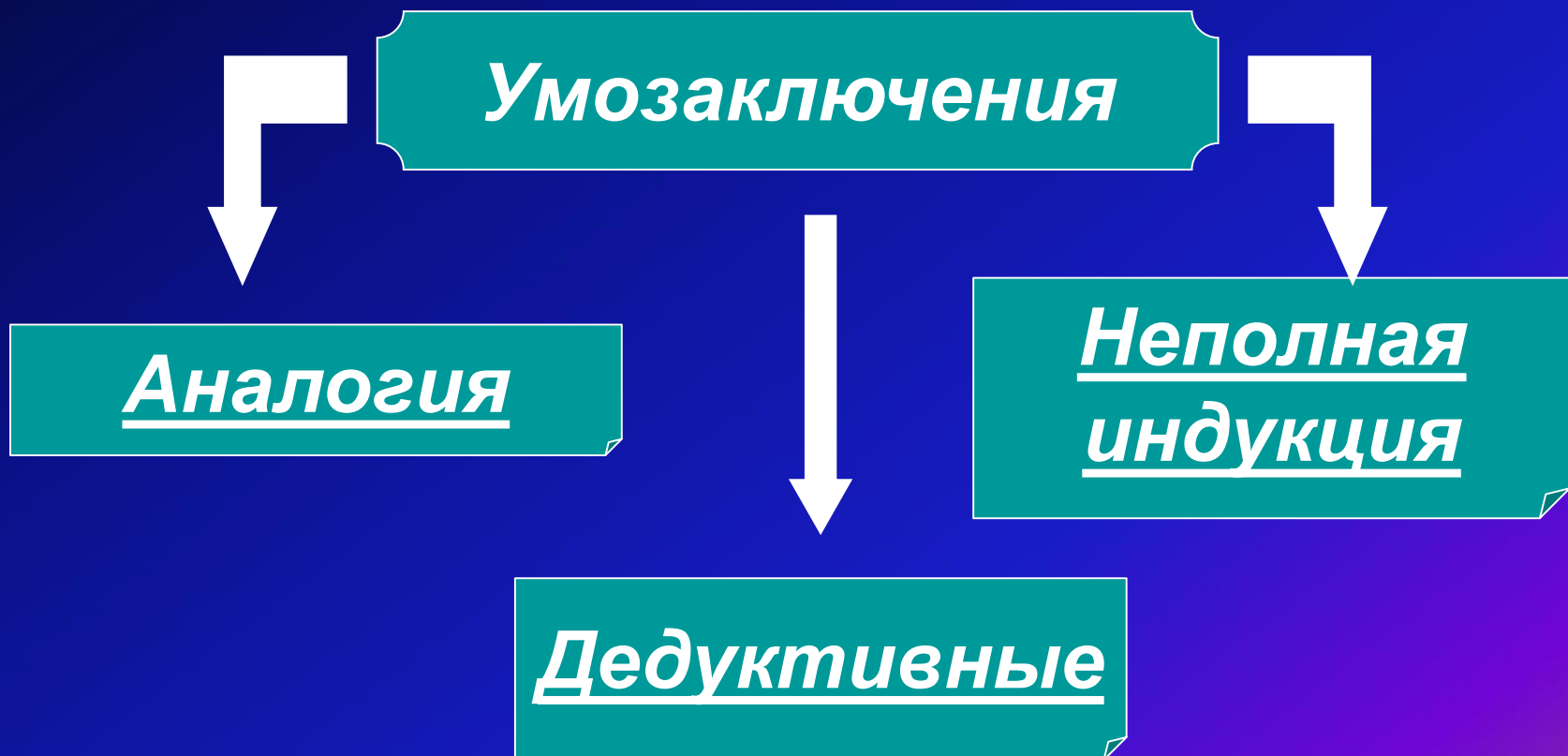
Посылки – это высказывания, содержащие исходное знание.

Заключение – это высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного.

Логический переход от посылок к заключению - **ВЫВОД.**

- **Пример.** Все углероды горючи } *посылки*
Алмаз - углерод }
Алмаз горюч - *заключение*

Умозаключение — форма мышления, в которой из одного или нескольких суждений на основании определенных правил вывода получается новое суждение, с необходимостью или определенной степенью достоверности следующее из них.



Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования

$$A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B \quad \text{или} \quad \frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$$

Пример. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы $20+3$.

Он рассуждает: «Число 23 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, $23=20+3$ ».

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса

Пример. $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

Вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением

Пример. $3+5 < 3 \cdot 5$, $2+7 < 2 \cdot 7$, $4+8 < 4 \cdot 8$.

Вывод: $(\forall a, b \in \mathbf{N}) a + b < a \cdot b$ – ложное утверждение.

Контрпример: $1+2$ не меньше, чем $1 \cdot 2$

Выводы, полученные с помощью неполной индукции, носят характер предположения и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Аналогия – это умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Пример. $27 \cdot 3 = (20+7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 81$.

Действуя по аналогии, $712 \cdot 4 = (700+10+2) \cdot 4 = 2800+40+8 = 2848$.

По аналогии можно умножить 6288 на 3.

Вывод по аналогии носит характер предположения и нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Пример. ***Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.***

Действуя по аналогии, получаем вывод: число делится на 8, если оно делится на 2 и на 4. Вывод ложный (контрпример: число 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8).

Схемы дедуктивных умозаключений

«В холодную погоду нужно тепло одеваться. Сегодня холодно? Холодно. Вот и одевайся теплей!»

Дедуктивные умозаключения позволяют строить частные суждения из общих

Правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений

Правила вывода
**(схемы дедуктивных (правильных)
умозаключений):**

Правило заключения :

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$$

Пример. «Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5».

$$\blacksquare \quad \frac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}} \quad \text{— правило отрицания}$$

Пример. «Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5»

$$\blacksquare \quad \frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)} \quad \text{— правило силлогизма}$$

Пример. «Если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3»

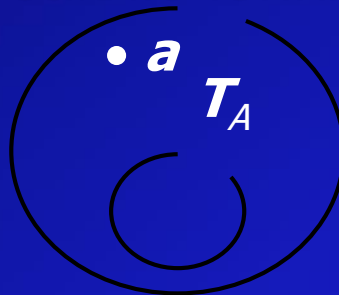
Проверка правильности умозаключений с помощью кругов Эйлера

- **Пример.** «Если запись числа оканчивается цифрой 5, то число делится на 5. Число 125 делится на 5. Следовательно, запись числа 125 оканчивается цифрой 5».

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}$$

Решение. Схема умозаключения -

$$\frac{T_A \subset T_B, a \in T_B}{a \in T_B}$$



Данная схема не является правилом дедуктивного умозаключения.

Способы математического доказательства

- Доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.
- Основа математического доказательства - дедуктивный вывод.
- Доказательство – это цепочка дедуктивных умозаключений, расположенных в определенном порядке, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.

Доказательства

(по способу ведения)



прямые

основываясь на
некотором истинном
предложении и с
учетом условия
теоремы, строится
цепочка дедуктивных
умозаключений,
которая приводит к
истинному
заключению

косвенные

истинность
утверждения
обосновывается
с помощью
опровержения
противоречащего
о утверждения

- **Пример. Доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник.**

Прямое доказательство.

Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360° , то и данном она составляет 360° . Сумма трех прямых углов равна 270° , и, значит, четвертый имеет величину $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Если все углы четырехугольника прямые, он – прямоугольник. Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

- Пример косвенного доказательства - доказательство ***методом от противного***

Пример. Доказать, что если $a+3>10$, то $a\neq 7$.

Доказательство.

Предположим, что заключение ложно, тогда истинно его отрицание, т.е. $a = 7$. Подставим значение a в неравенство $a+3>10$. Получим $7+3>10$ или $10>10$, которое ложно. Пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому, если $a+3>10$, то $a\neq 7$.

- Доказательство методом
исключения - косвенный вид
доказательства

Пример. Известно, что преступление
могут совершить только А, либо В, либо
С. Доказано, что А и В преступление не
совершали.

Вывод: преступление совершил С.

Особые методы доказательства:

1. Полная индукция - такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Пример. Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.

Доказательство.

Составными здесь будут числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: $6=3+3$, $8=5+3$ и т.д. Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

2. Математическая индукция